

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО
МАТЕМАТИКА

Русе, 28 май 2016 г.

Група В

Задача 1. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Да се пресметне A^{2016} .

б) Ако M е 5×5 матрица от цели числа и първите 22 члена на редицата $\Delta_n = \det A^n$ (n -естествено число) са нейни елементи, да се докаже, че $\det M$ е четно число.

Задача 2. Дадени са точките $A(-1, -1)$ и $B(3, 3)$ и окръжност

$$k : x^2 + (y - 5)^2 = R^2$$

с радиус R .

а) Да се намери R , така че правата AB да се допира до k .

б) Ако $R = 1$ и точка C лежи на k , да се намери минималното лице на триъгълник ABC .

Задача 3. Нека $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+2016}$.

Да се намери броят на:

а) екстремумите на $f(x)$;

б) корените на уравнението $f(x) = 0$.